# Domino–Pflasterungen und Aztekensterne

Felix Breuer
*E-Mail:* felix@fbreuer.de

Daria Schymura
*E-Mail:* daria.schymura@gmx.net

*14. September 2004*

**Zusammenfassung**

Elkies, Kuperberg, Larsen und Propp zeigen in [1] eine verblüffend einfache Formel für die Anzahl der Domino–Pflasterungen von sogenannten Aztekensternen. Einer der vier Beweise, die sie angeben, kommt mit elementaren Mitteln aus. In diesem wird eine Verschiebeoperation auf den einzelnen Dominos, das Domino–Shuffling, verwendet. Der Beweis einer zentralen Eigenschaft dieser Operation (Theorem 4) bleibt in [1] jedoch vage. Nachdem wir uns anhand einiger Beispiele dem Thema genähert haben, formulieren wir Theorem 4 und stellen den Beweis der Formel mittels Domino–Shuffling aus [1] vor. Anschließend beleuchten wir die Schwierigkeiten, die beim Beweis von Theorem 4 auftreten und geben einen Beweis an.

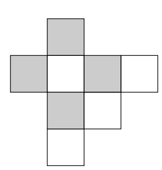
## Domino–Pflasterungen von Schachbrettern

Im Folgenden geht es um Domino–Belegungen von Schachbrettern. Unter einem *Schachbrett* verstehen wir dabei immer einen beliebigen, möglicherweise unendlichen Ausschnitt eines unendlichen Schachbrettes. Es sei denn, es ist ausdrücklich von einer speziellen Schachbrettform die Rede, z.B. dem üblichen $8 \times 8$-Schachbrett. Unter einem *Domino* verstehen wir einen Spielstein, der so auf das Schachbrett gelegt werden darf, dass er zwei benachbarte Felder überdeckt. Eine *teilweise Pflasterung* eines Schachbrettes ist eine Belegung des Brettes mit Dominos, so dass sich keine zwei Dominos überlappen. Eine *Pflasterung* ist eine teilweise Pflasterung, bei der jedes Feld des Brettes belegt ist.

Wir interessieren uns nun dafür, ob für ein gegebenes Schachbrett eine Pflasterung existiert und, wenn ja, wie viele Pflasterungen dieses Schachbrettes es gibt.

Betrachten wir ein $8 \times 8$-Schachbrett, bei dem das Feld oben links und das Feld unten rechts entfernt wurden. Existiert eine Pflasterung dieses Schachbrettes? Jeder Dominostein einer Pflasterung überdeckt auf einem Schachbrett ein schwarzes und ein weißes Feld. Das Feld oben links und das Feld unten rechts haben dieselbe Farbe, das heißt, das Schachbrett hat verschieden viele weiße und schwarze Felder und es kann keine Pflasterung davon geben.

Die Bedingung an ein Schachbrett, gleich viele weiße und schwarze Felder zu haben, ist also notwendig für die Existenz einer Pflasterung. Dass sie nicht hinreichend ist, zeigt das folgende Beispiel.



Ein $2 \times 2$-Schachbrett hat zwei Pflasterungen, eine in der beide Dominos horizontal und eine in der sie vertikal nebeneinander liegen. Ein $2 \times 3$-Brett hat drei Pflasterungen. Die Anzahl der Pflasterungen eines $2 \times n$-Brettes entspricht der Fibonacci-Zahl $F_{n+1}$, denn wie Abbildung 1 verdeutlicht, genügt sie der Fibonacci-Rekursion.

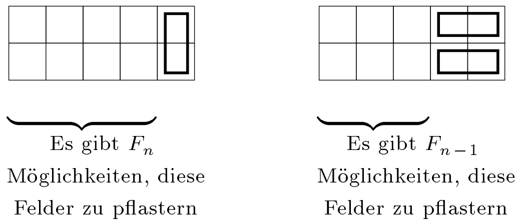



**Abbildung 1.** Es gibt zwei Möglichkeiten, die letzte Spalte eines $2 \times n$ Brettes zu überdecken. Je nachdem, welche gewählt wird, gibt es noch $F_n$ bzw. $F_{n-1}$ Möglichkeiten, den Rest zu pflastern. Die Summe von beiden ist dann die Anzahl aller Pflasterungen des $2 \times n$-Brettes, entsprechend $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.

Wie sieht es nun mit dem gewohnten $8 \times 8$-Schachbrett selbst aus? Die Frage nach der Anzahl der Pflasterungen war lange offen. Es stellte sich heraus, dass es 1.679.616 Möglichkeiten gibt, es zu pflastern. Allgemeiner hat Kasteleyn 1961 in [2] bewiesen, dass, wenn $N(n, m)$ die Anzahl der Pflasterungen eines $n \times m$-Schachbrettes bezeichnet und $m$ und $n$ gerade sind, gilt

$$N(n,m) = \prod_{j=1}^{\frac{n}{2}} \prod_{k=1}^{\frac{m}{2}} 4\,(\cos^2 \frac{\pi j}{n+1} + \cos^2 \frac{\pi k}{m+1}) \tag{1}$$

Dieses Resultat ist schon deshalb estaunlich, weil man dem Ausdruck (1) nicht ohne weiteres ansieht, dass er für gerade $n$ und $m$ ganzzahlig ist. Ein Beweis für (1) ist im Fall quadratischer Schachbretter auch in [4] und in [5] zu finden. Mehr über Pflasterungsprobleme ist beispielsweise in [3] zu finden.

Ist die Formel für alle Familien von nicht-trivialen Schachbrettformen ähnlich kompliziert? In diesem Artikel wollen wir uns mit sogenannten Aztekensternen (siehe Abbildung 2) beschäftigen. Während ein quadratisches Schachbrett der Breite $2n$ derjenige Bereich ist, den vier Figuren, im Quadrat aufgestellt, mit $n-1$ horizontalen, vertikalen oder diagonalen Schritten erreichen können, handelt es sich bei einem Aztekenstern der Breite $2n$ (einem $n$-Aztekenstern) um den Bereich, der mit $n-1$ horizontalen oder vertikalen Schritten erreicht werden kann. Die Anzahl der Pflasterungen eines $n$-Aztekensterns bezeichnen wir mit $\mathrm{AZ}(n)$.

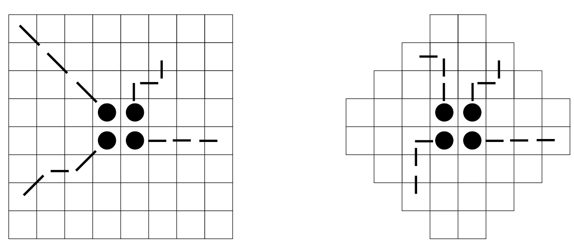


**Abbildung 2.** Das $8 \times 8$-Schachbrett und der 4-Aztekenstern

Elkies, Kuperberg, Larsen und Propp haben 1992 den Begriff des Aztekensterns (Aztec diamond) eingeführt und folgende im Vergleich zu (1) verblüffend einfache Formel bewiesen:

**Satz 1.**

$$\mathrm{AZ}(n) \;=\; 2^{\binom{n+1}{2}}$$

Elkies et al. geben in [1] vier verschiedene Beweise dieser Formel. Einer dieser Beweise kommt mit elementaren Mitteln aus und besticht durch eine originelle Operation – das Domino-Shuffling –, die Elkies et al. einführen, um Pflasterungen des $n$-Aztekensterns in Pflasterungen des $(n+1)$-Aztekensterns zu überführen. Der Dreh- und Angelpunkt dieses Beweises ist Theorem 4. Der Beweis von Theorem 4 bleibt bei Elkies et al. jedoch vage.

Im nächsten Abschnitt werden wir die nötigen Begriffe einführen, um Theorem 4 formulieren zu können. Dann werden wir zeigen, wie aus Theorem 4 die Formel folgt. Anschließend werden wir die Schwierigkeiten beleuchten, die bei dem Versuch, Theorem 4 zu beweisen, auftreten, um dann abschließend einen Beweis anzugeben.

## Domino–Shuffling

Im Folgenden betrachten wir einen unendlichen Gittergraphen, dessen Flächen auf die übliche Weise 2-gefärbt sind, also ein unendliches Schachbrett.

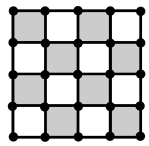


**Abbildung 3.** Ausschnitt aus dem Schachbrettgraphen. Die Knoten sind mit schwarzen Punkten, die Kanten mit schwarzen Linien markiert.

Wir werden verschiedene Teilmengen eines solchen Schachbrettes betrachten, darunter Aztekensterne (wie oben definiert), Blöcke von $2 \times 2$ Feldern, außerdem Dominosteine und Knoten.

Mit *Knoten* bezeichnen wir in diesem Artikel diejenigen Punkte, an denen sich vier Felder berühren, also die Knoten des Schachbrettgraphen im graphentheoretischen Sinn (Abbildung 3). Mit *Ecken* bezeichnen wir diejenigen Knoten, an denen sich sowohl senkrechte als auch waagerechte Kanten aus einer gegebenen Menge von Kanten berühren. Betrachen wir z.B. die Randkanten (also Kanten zwischen freien und belegten Feldern), so sind die Ecken gerade das, was man in der Alltagssprache unter Ecken versteht (vergleiche Abbildung 4).

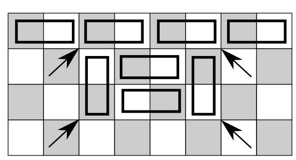


**Abbildung 4.** Eine teilweise Pflasterung. Die Ecken des Randes sind mit Pfeilen gekennzeichnet.

Wir werden die oben genannten Objekte danach unterscheiden, welche Farbe das obere linke Feld hat. Ist das Feld, das oben links an einen Knoten angrenzt, schwarz, so nennen wir auch diesen Knoten *schwarz*. Ist das obere linke Feld eines $2 \times 2$-Blocks weiß, so nennen wir den Block *weiß* und so weiter.

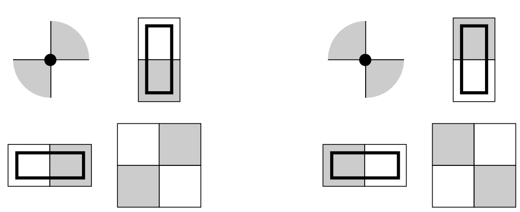


**Abbildung 5.** Weiße und schwarze Objekte

Das Domino–Shuffling, die für diesen Artikel zentrale Operation, werden wir nun in einem ersten Schritt als Verschiebeoperation auf einzelnen Dominos einführen. Unser Ziel ist dann, diese Operation hochzuheben und als Abbildung auf gewissen teilweisen Pflasterungen zu definieren. Die Betrachtung des Shufflings auf einzelnen Dominos wird uns helfen, den für diese Abbildung geeigneten Definitionsbereich, die Menge der reduzierten Pflasterungen, zu finden.

**Definition 2.** *(Domino–Shuffling S) Auf den Dominosteinen eines teilweise gepflasterten Schachbrettes definieren wir eine Verschiebeoperation dadurch, dass wir jeden Stein um ein Feld verschieben, und zwar schwarze horizontale Dominos nach unten, schwarze vertikale nach rechts. Weiße Dominos werden in die jeweils entgegengesetzte Richtung verschoben. Siehe dazu Abbildung 6.*

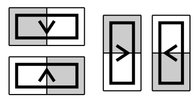


**Abbildung 6.** Domino-Shuffling. Der Pfeil zeigt die Richtung an, in die der jeweilige Domino verschoben wird.

Beginnen wir mit einer teilweisen Pflasterung eines Schachbrettes und wenden das Domino–Shuffling $S$ darauf an, ist das Resultat im Allgemeinen keine teilweise Pflasterung mehr. Ein Beispiel dafür ist in Abbildung 7 zu sehen. Die Frage, auf welche Menge $M$ von teilweisen Pflasterungen $S$ eingeschränkt werden muß, damit das Bild $S(M)$ wieder eine Menge von teilweisen Pflasterungen ist, wird bald geklärt werden.

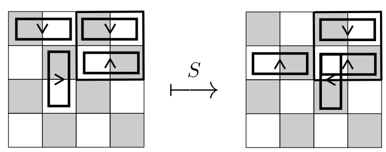



**Abbildung 7.** Wenden wir die Shuffling–Operation auf eine beliebige teilweise Pflasterung an, kann es zu Überlappungen kommen. Die abgebildete teilweise Pflasterung enthält einen schwarzen Block von Dominos, der durch eine Umrandung hervorgehoben ist.

Schon an der Definition des Domino–Shuffling sieht man, dass zweifaches Ausführen von $S$ der Identität entspricht. Haben wir eine teilweise Pflasterung $T$, auf die bereits $S$ angewandt wurde, so können wir durch nochmaliges Anwenden von $S$ die Ausgangssituation wiederherstellen, man könnte auch sagen: Vor dem Shuffling ist nach dem Shuffling. $S$ ist also insbesondere umkehrbar und es gilt: Finden wir eine Menge $M$, so dass sowohl $M$ als auch $S(M)$ Mengen von teilweisen Pflasterungen sind, so ist $S$ eine Involution auf $M \cup S(M)$.

Überdecken zwei Dominos einen schwarzen Block, so nennen wir diese beiden Dominos ebenfalls einen schwarzen Block (von Dominos). Durch $S$ werden zwei solche Dominos aufeinander abgebildet, der schwarze Block bleibt durch $S$ also erhalten. Eine teilweise Pflasterung $T$ des Schachbrettes enthält also genau dann einen schwarzen Block, wenn $S(T)$ diesen schwarzen Block enthält.

## Eine Involution auf den reduzierten Pflasterungen

In den Abbildungen 7 und 8 sieht man, dass das Bild einer teilweisen Pflasterung $T$ unter $S$ beispielweise dann Überlappungen von Dominos enthalten kann, wenn $T$ schwarze Blöcke von Dominos enthält oder die freie Fläche nicht aus schwarzen Blöcken aufgebaut ist. Wir werden sehen, dass wir eine Menge $M$ mit den gewünschten Eigenschaften erhalten, wenn wir beides verbieten.

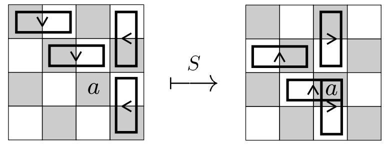



**Abbildung 8.** Ein weiteres Beispiel dafür, dass es im Bild einer teilweisen Pflasterung unter der Shuffling–Operation Überlappungen geben kann. Das Feld $a$ gehört zur freien Fläche der teilweisen Pflasterung, ist aber nicht Teil eines freien schwarzen Blocks.

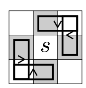
**Definition 3.** *Eine teilweise Pflasterung $T$ heißt* reduzierte Pflasterung*, wenn $T$ keine schwarzen Blöcke enthält und durch Hinzufügen von disjunkten schwarzen Blöcken von Dominos zu einer vollständigen Pflasterung erweitert werden kann.*

*Sie heißt $k$-*reduziert*, wenn sie durch Hinzufügen von $k$ disjunkten schwarzen Blöcken zu einer vollständigen Pflasterung erweitert werden kann.*

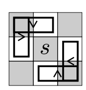
Prüfen wir zuerst, ob für eine beliebige reduzierte Pflasterung $T$ das Bild $S(T)$ wieder eine teilweise Pflasterung ist, d.h. keine Überlappungen enthält. Angenommen, es gibt ein weißes Feld $s \in S(T)$, das von zwei Dominosteinen überdeckt wird. Dann enthält $S(T)$ zwei der folgenden vier Dominos:

Halten wir fest, welche Dominos überhaupt auf ein festes Feld $s$ abgebildet werden können. Dazu müssen wir nur die Bilder dieser vier Dominos betrachten, denn $S(S(T)) = T$.

A) *Sei $T$ eine teilweise Domino–Pflasterung eines Schachbrettes, $s$ ein weißes Feld. Ist $s$ in $S(T)$ überdeckt, gehört einer der folgenden Dominos zu $T$:*



*Analog dazu: Sei $T$ eine teilweise Domino–Pflasterung eines Schachbrettes, $s$ ein schwarzes Feld. Ist $s$ in $S(T)$ überdeckt, gehört einer der folgenden Dominos zu $T$:*



Das bedeutet, wenn $s$ von zwei Dominos überdeckt wird, enthält $T$ zwei der Dominos aus dem oberen Bild in A). Da $T$ keine doppelt überdeckten Felder hat, bleiben noch folgende Fälle:

In jedem dieser Fälle müßte in $T$ das Feld $s$ von einem Domino bedeckt sein. Denn würde $s$ zur freien Fläche von $T$ gehören, müßte es wegen der Reduziertheit von $T$ durch Hinzufügen eines schwarzen Blockes von Dominos überdeckt werden können, was offensichtlich nicht möglich ist. Überdeckt man $s$ aber mit einem Domino, entsteht ein schwarzer Block von Dominos, was ein Widerspruch zur Reduziertheit von $T$ ist.

Der Beweis dafür, dass nach dem Shuffling kein schwarzes Feld von zwei Dominos überdeckt werden kann, geht analog.

Die Menge der reduzierten Pflasterungen ist also ein Beispiel für unsere gesuchte Menge $M$. Wir müssen nun klären, wie die Bildmenge aussieht. Theorem 4 sagt uns, dass $M = S(M)$ gilt.

**Satz 4.** *Domino–Shuffling ist eine Involution auf den reduzierten Pflasterungen eines unendlichen Schachbrettes.*

Um Theorem 4 zu beweisen, müssen wir uns noch überlegen, dass für eine beliebige reduzierte Pflasterung $T$ des unendlichen Schachbrettes $S(T)$ wieder eine reduzierte Pflasterung ist. $S(T)$ enthält keinen schwarzen Block von Dominos, da $T$ keinen enthält und $S$ schwarze Blöcke von Dominos in sich abbildet. Es bleibt also zu zeigen, dass sich $S(T)$ durch Hinzufügen von schwarzen Blöcken von Dominos zu einer Pflasterung des ganzen Schachbrettes erweitern lässt, d.h., dass die nicht belegten Felder von $S(T)$ die disjunkte Vereinigung von schwarzen Blöcken sind. Dies ist der schwierige Teil des Beweises, den wir auf später verschieben. Zunächst wollen wir sehen, wie auf schöne und einfache Weise Theorem 1 aus Theorem 4 folgt.

## Der Beweis der Formel

**Folgerung 5.** *Sei $T$ eine $k$-reduzierte Pflasterung des weißen $n$-Aztekensterns (also eines Sterns, dessen oberstes linkes Feld weiß ist). Dann ist $S(T)$ eine $(n+k+1)$-reduzierte Pflasterung eines schwarzen $(n+1)$-Aztekensterns.*

*Analog gilt: Ist $T$ eine $\ell$-reduzierte Pflasterung eines schwarzen $(n+1)$-Aztekensterns, dann ist $S(T)$ eine $(\ell-n-1)$-reduzierte Pflasterung eines weißen $n$-Aztekensterns.*

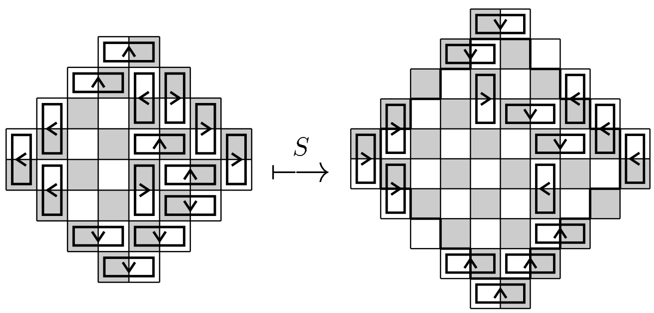



**Abbildung 9.** Beispiel einer 2-reduzierten Pflasterung des weißen 4-Aztekensterns, aus der durch $S$ eine 7-reduzierte Pflasterung des schwarzen 5-Sterns wird.

**Beweis.** Um diese Aussage zu beweisen, wenden wir Theorem 4 an. Sei $T$ eine $k$-reduzierte Pflasterung eines weißen $n$-Aztekensterns. Wir ergänzen $T$ zu einer Pflasterung $\hat{T}$ eines unendlichen Schachbrettes wie in Abbildung 10 dargestellt.

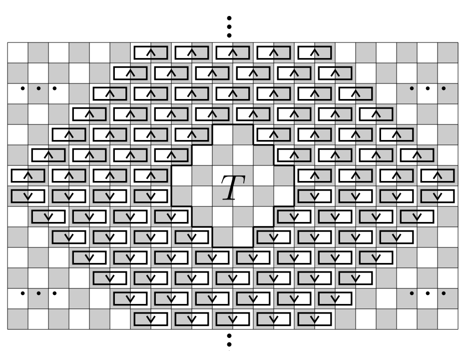



**Abbildung 10.** Wir ergänzen die Pflasterung der Aztekensterns $T$ zu $\hat{T}$.

Da $T$ reduziert ist, ist auch $\hat{T}$ reduziert, denn keiner der hinzugefügten Dominos kann mit einem Domino von $T$ einen Block bilden. Nach Theorem 4 ist auch $S(\hat{T})$ reduziert. Das bedeutet, dass $S(T)$ eine reduzierte Pflasterung des $(n+1)$-Aztekensterns sein muß. Siehe dazu Abbildung 11. Der $(n+1)$-Aztekenstern ist um $4(n+1)$ Felder, also $n+1$ Blöcke größer als der $n$-Aztekenstern und daraus folgt die Behauptung.

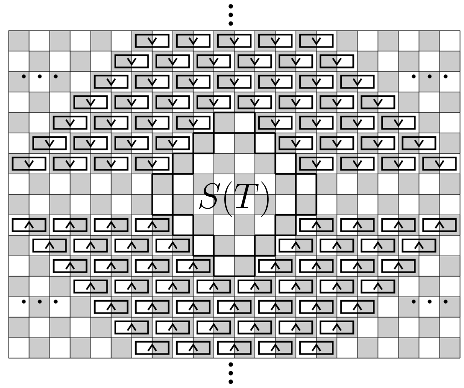



**Abbildung 11.** $S(\hat{T})$, auf den markierten $(n+1)$-Aztekenstern eingeschränkt, muss wegen Theorem 4 eine reduzierte Pflasterung sein.

$\square$

**Beweis.** (von Theorem 1) Da Domino–Shuffling nach Theorem 4 eine Involution ist, gibt es genauso viele $k$-reduzierte Pflasterungen des weißen $n$-Aztekensterns wie $(n+k+1)$-reduzierte Pflasterungen des schwarzen $(n+1)$-Aztekensterns. Zu jeder $k$-reduzierten Pflasterung gibt es $2^k$ vollständige Pflasterungen, da jeder freie Block mit zwei senkrechten oder zwei waagerechten Dominos aufgefüllt werden kann. Genauso gibt es zu jeder $(n+k+1)$-reduzierten Pflasterung $2^{n+k+1}$ vollständige Pflasterungen. Wir erhalten also eine Bijektion zwischen Mengen von Pflasterungen des $n$-Aztekensterns und Mengen von Pflasterungen des $(n+1)$-Aztekensterns, die je $2^k$ Pflasterungen auf $2^{n+k+1}$ Pflasterungen abbildet. In dieser Bijektion taucht jede Pflasterung des $n$- und des $(n+1)$-Aztekensterns genau einmal in einer Bild- oder Urbildmenge auf, denn zu jeder Pflasterung gibt es genau eine reduzierte Pflasterung. Das heißt, es muß gelten

$$\mathrm{AZ}(n+1) = 2^{n+1}\mathrm{AZ}(n).$$

Mit dem Anfangswert $\mathrm{AZ}(1) = 2$ folgt:

$$\mathrm{AZ}(n+1) = 2^{\sum_{i=1}^{n+1} i} = 2^{\frac{n(n+1)}{2}} = 2^{\binom{n+1}{2}}.$$

$\square$

## Ein Kriterium für die Reduziertheit einer teilweisen Pflasterung

Ein Teil des Beweises von Theorem 4 steht noch aus: Wir haben noch zu zeigen, dass für eine reduzierte Pflasterung $T$ die teilweise Pflasterung $S(T)$ durch Hinzufügen von schwarzen Blöcken zu einer vollständigen Pflasterung erweitert werden kann. Wenn eine teilweise Pflasterung durch Hinzufügen von schwarzen Blöcken zu einer vollständigen erweitert werden kann, sagen wir, diese Pflasterung *hat eine Vervollständigung* und meinen damit immer eine Vervollständigung aus disjunkten schwarzen Blöcken. In diesem Abschnitt wollen wir Kriterien dafür entwickeln, wann eine teilweise Pflasterung eine Vervollständigung hat. Dabei werden wir das Shuffling erst einmal außen vor lassen.

Um besser über eine gegebene teilweise Pflasterung $T$ sprechen zu können, führen wir zunächst ein paar Begriffe ein. Wir nennen eine Kante *Randkante*, wenn eines der beiden angrenzenden Felder überdeckt und das andere frei ist. Sind beide Felder frei, so nennen wir auch die Kante *frei*. Die zusammenhängenden Stücke der freien Fläche nennen wir *Komponenten*: zwei Felder gehören zur selben Komponente, wenn eine Schachfigur mit horizontalen und vertikalen Schritten (also ein Turm) vom einen zum andern ziehen kann und dabei nur freie Felder benutzt.

Da es für die Frage, ob eine teilweise Pflasterung eine Vervollständigung hat, keine Rolle spielt, ob die schwarzen Blöcke in einer Vervollständigung sich aus waagerechten oder senkrechten Paaren von Dominos zusammensetzen, werden wir im Folgenden einen schwarzen Block als ein Quadrat auffassen, das $2 \times 2$ Felder und vier Kanten *verdeckt* (siehe Abbildung 12).

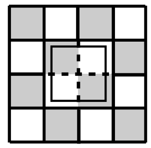


**Abbildung 12.** Der schwarze Block verdeckt die gestrichelten Kanten.

Ob und wie wir eine Komponente vervollständigen können, hat keinen Einfluß darauf, ob und wie wir andere Komponenten der freien Fläche vervollständigen können.

B) *Eine teilweise Pflasterung hat eine Vervollständigung genau dann, wenn jede Komponente eine Vervollständigung hat.*

Ein schwarzer Block hat nur schwarze Ecken. Da jede Ecke des Randes einer reduzierten Pflasterung auch Ecke eines schwarzen Blockes ihrer Vervollständigung sein muss, folgt sofort die notwendige Bedingung

C) *Wenn eine teilweise Pflasterung eine Vervollständigung hat, dann hat ihr Rand nur schwarze Ecken.*

Diese Bedingung ist jedoch nicht hinreichend, wie Abbildung 13 zeigt.

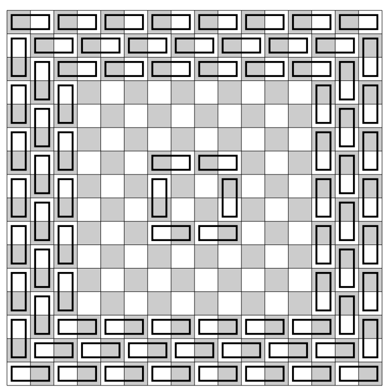


**Abbildung 13.** Wenn der Rand einer Fläche nicht zusammenhängt, kann diese unter Umständen nicht mit schwarzen Blöcken auffüllbar sein, obwohl alle Ecken schwarz sind.

Wir werden keinen Erfolg haben, ein Kriterium für die Reduziertheit einer teilweisen Pflasterung zu formulieren, indem wir lediglich Bedingungen an die Ecken einer Pflasterung stellen. Denn was ist, wenn diese gar keine Ecken hat (siehe Abbildung 14)?

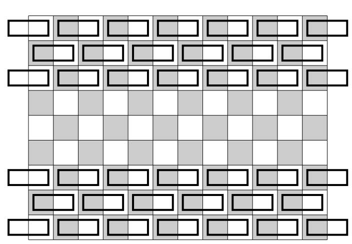


**Abbildung 14.** Ein unendlicher freier Streifen ungerader Höhe lässt sich nicht mit schwarzen Blöcken auffüllen, hat aber überhaupt keine, also nur schwarze Ecken.

Eine Möglichkeit, das Beispiel aus Abbildung 14 so zu modifizieren, dass es eine Vervollständigung gibt, ist, eine Reihe von Dominos zu entfernen, so dass der freie Streifen Höhe vier hat. Dann gibt es eine Vervollständigung, und zwar überraschenderweise genau eine. Gibt es immer höchstens eine Vervollständigung?

Zumindest für die leere Pflasterung gilt dies nicht. Diese besitzt genau zwei Vervollständigungen. Geben wir jedoch eine Kante vor, die von keinem Block verdeckt werden darf, so gibt es nur noch eine Vervollständigung der leeren Pflasterung, die diese Kante nicht verdeckt. Wir sagen nun, zwei Kanten sind *einer Meinung*, wenn es eine Vervollständigung der leeren Pflasterung gibt, die keine von beiden verdeckt (siehe Abbildung 15).

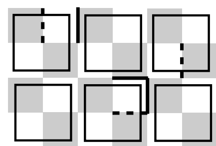


**Abbildung 15.** Sowohl die schwarzen als auch die gestrichelten Kanten für sich genommen sind einer Meinung. Nimmt man jedoch eine schwarze und eine gestrichelte Kante, sind diese nicht einer Meinung.

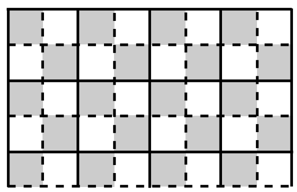


**Abbildung 16.** Einer-Meinung-sein ist eine Äquivalenzrelation auf den Kanten eines Schachbrettes.

Wie man sieht, ist Einer-Meinung-sein eine Äquivalenzrelation. In Abbildung 16 sind die beiden Äquivalenzklassen hervorgehoben und man sieht:

D) *Wenn zwei schwarze Blöcke $b_1$ und $b_2$ aneinander angrenzen, aber sich nicht überlappen, dann ist Rand von $b_1$ mit dem Rand von $b_2$ einer Meinung.*

Aus dieser Beobachtung ergibt sich das gesuchte Kriterium:

E) *Eine teilweise Pflasterung $T$ hat genau dann eine Vervollständigung, wenn die Kanten auf dem Rand jeder Komponente der freien Fläche einer Meinung sind.*

**Beweis.** $\Longrightarrow$ Sei $V$ eine Vervollständigung von $T$, und $K$ eine Komponente von $T$. Seien nun $r$ und $r'$ beliebige Randkanten von $K$ und $f$ bzw. $f'$ die jeweils angrenzenden freien Felder. Da $K$ zusammenhängend ist, können wir mit einem Turm auf freien Feldern von $f$ nach $f'$ ziehen. Auf diesem Weg kommen wir an den Blöcken $b_1$, ..., $b_n \in V$ vorbei. $b_i$ grenzt dabei jeweils an $b_{i+1}$, aber keine zwei Blöcke überlappen sich. Also ist der Rand von $b_i$ mit dem von $b_{i+1}$ einer Meinung. Da $r$ auf dem Rand von $b_1$ und $r'$ auf dem von $b_n$ liegt, ergibt sich die Behauptung.

$\Longleftarrow$ Sei $K$ eine beliebige Komponente von $T$. Der Rand von $K$ hat eine Meinung darüber, wie die leere Pflasterung vervollständigt werden soll. Deswegen können wir diese Vervollständigung der leeren Pflasterung nehmen und entlang des Randes von $K$ ausschneiden, ohne dass wir einen Block zerschneiden, und erhalten so unsere Vervollständigung von $K$. □

Durch Abbildung 16 wird jetzt auch klar, welche Bedeutung die Tatsache hat, dass schwarze Blöcke nur schwarze Ecken haben:

F) *Alle an einen schwarzen Knoten grenzenden Kanten sind einer Meinung.*

Es ist also sinnvoll zu definieren: Zwei *schwarze Knoten* heißen *einer Meinung*, wenn alle angrenzenden Kanten einer Meinung sind. Dies ist genau dann der Fall, wenn die beiden Knoten in $x$- und $y$-Richtung geraden Abstand haben. Da zu jeder Kante genau ein schwarzer Knoten gehört, stellen wir außerdem fest

G) *Zwei Kanten sind genau dann einer Meinung, wenn die zugehörigen schwarzen Knoten einer Meinung sind.*

Wir können in E) also „die Kanten auf dem Rand" durch „die Knoten auf dem Rand" ersetzen.

An Abbildung 16 sehen wir auch, dass sich Kanten, die unterschiedlicher Meinung sind, nur an weißen Knoten berühren und dort eine Ecke bilden. Wir verstehen unter einem *Weg von Kanten* eine Folge von Kanten, bei der aufeinanderfolgende Kanten einen Knoten gemeinsam haben.

H) *Zwei Kanten auf einem Weg können dann und nur dann verschiedener Meinung sein, wenn der Weg dazwischen eine weiße Ecke hat.*

## Reduzierte Pflasterungen und Domino–Shuffling

Kommen wir nun zurück zum Domino–Shuffling. Um unseren Beweis von Theorem 4 zu vollenden, müssen wir für eine beliebige reduzierte Pflasterung $T$ prüfen, ob sich $S(T)$ vervollständigen lässt. Unser Kriterium E) haben wir so formuliert, dass wir für jede einzelne Komponente von $S(T)$ etwas zu prüfen haben und dabei etwas über die Komponenten von $T$ voraussetzen können. Wie bringen wir also die freien Flächen in $T$ mit denen in $S(T)$ in Verbindung?

Dies ist nicht ganz so einfach, wie Abbildung 17 zeigt, denn freie Flächen können beim Shuffling entstehen, verschwinden, vereinigt oder geteilt werden.

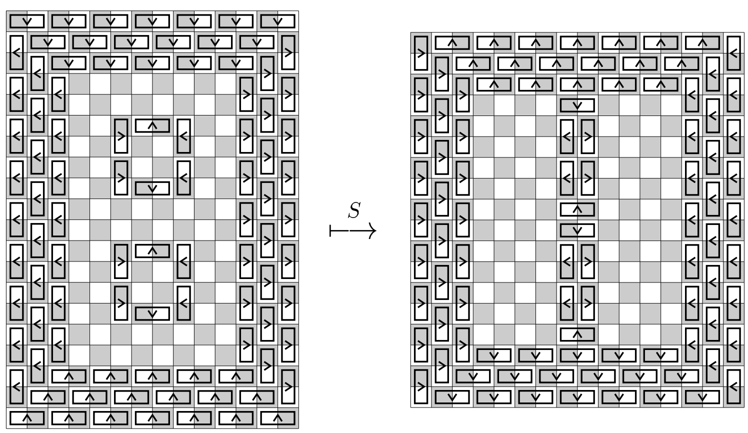



**Abbildung 17.** Durch das Shuffling ändert sich die Anzahl der freien Flächen. Die beiden kleinen Flächen verschwinden, die große wird in 2 Flächen unterteilt. Auch die Anzahl der Ecken, der schwarzen Knoten auf dem Rand und der Randkanten ändert sich.

Unser Ziel ist nun, einen Begriff zu entwickeln, der es trotzdem erlaubt, Komponenten der freien Fläche während des Shufflings „im Auge zu behalten". Bis jetzt haben wir unter der freien Fläche einer teilweisen Pflasterung die Menge der freien Feldern verstanden und diejenigen Felder zu einer Komponente zusammengefasst, zwischen denen es einen Weg von freien Feldern gibt. Um unser Kriterium anzuwenden, müssen wir jedoch für zwei Kanten zeigen, dass sie einer Meinung sind und schon in H) haben wir gesehen, dass für diesen Zweck ein Weg von Kanten ausreichen kann.

**Definition 6.** *i. Wir nennen eine Kante* geheim*, wenn die beiden angrenzenden Felder von zwei Dominosteinen überdeckt werden, die nach dem Shuffling nicht mehr benachbart sind. Dabei heißen zwei Dominosteine benachbart, wenn sie eine Kante gemeinsam haben (siehe Abbildungen 18 und 19).*

*ii.* *Wir sagen, zwei Knoten gehören zur selben* V-Komponente*, wenn es einen Weg aus erlaubten Kanten gibt, der beide verbindet. Dabei sind freie Kanten, Randkanten und geheime Kanten* erlaubt*.*

*Eine V-Komponente ist also eine Menge von Knoten.*

*iii.* *Randkanten und geheime Kanten nennen wir auch* V-Randkanten*.*

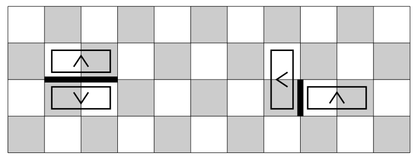


**Abbildung 18.** geheime Kanten zwischen benachbarten Dominos

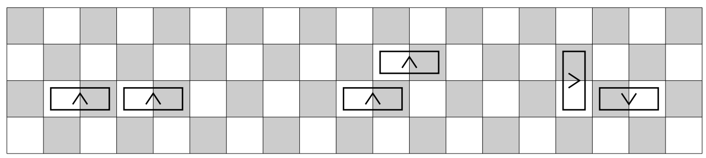


**Abbildung 19.** benachbarte Dominos ohne geheime Kanten

Es ist sofort klar, dass der Begriff der V-Komponente eine Verallgemeinerung unseres ursprünglichen Zusammenhangsbegriffs darstellt, denn für einen gegebenen Weg von Feldern können wir für je zwei an den Weg angrenzende Knoten sofort einen Weg von erlaubten Kanten konstruieren, der beide verbindet.

Nun testen wir die neuen Begriffe an unserem Beispiel (Abbildung 20).

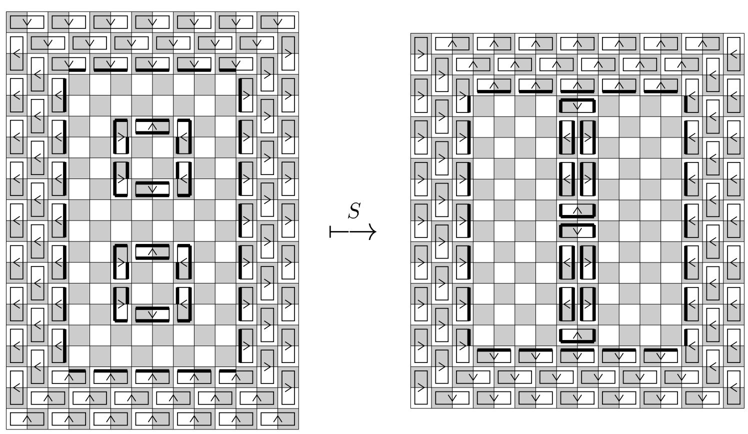



**Abbildung 20.** Die Anzahl der V-Komponenten ändert sich durch das Shuffling nicht. Es gibt 3 V-Komponenten, von denen 2 nach dem Shuffling keine freie Fläche haben. Zählt man geheime Kanten, wie durch die Markierung angedeutet, doppelt, so ändert sich auch die Anzahl der V-Randkanten nicht. In der Tat gibt es eine Bijektion zwischen den V-Randkanten vor und nach dem Shuffling, jedoch ist deren Definition mühselig und wird für unsere Zwecke nicht benötigt.

Mit einer Fallunterscheidung lässt sich folgende wesentliche Eigenschaft zeigen

I) *Ist $T$ eine reduzierte Pflasterung, so hat sowohl der V-Rand von $T$ als auch der V-Rand von $S(T)$ nur schwarze Ecken.*

Dies erlaubt uns, unser Kriterium auf V-Komponenten zu übertragen.

J) *Eine teilweise Pflasterung $T$ hat genau dann eine Vervollständigung, wenn der V-Rand jeder V-Komponente einer Meinung ist.*

**Beweis.** $\Longleftarrow$ Folgt aus E).

$\Longrightarrow$ Sei $T$ eine teilweise Pflasterung, die eine Vervollständigung besitzt, und $K$ eine V-Komponente von $T$. Wir zeigen, dass alle schwarzen Knoten auf dem Rand von $K$ einer Meinung sind. Seien dazu $p$ und $q$ schwarze Knoten auf dem Rand und $w$ ein erlaubter Weg zwischen beiden. Wir betrachten $w$ abschnittsweise, und zwar erstens Abschnitte von freien und Randkanten und zweitens Abschnitte, die nur aus geheimen Kanten bestehen.

Der Weg kann nur an Knoten den Abschnitt wechseln, an denen der V-Rand eine Ecke hat, also nach I) nur an schwarzen Knoten auf dem Rand. Da $p$, $q$ schwarze Knoten sind, beginnen und enden also alle Abschnitte an schwarzen Knoten.

Wir müssen also nur noch für jeden Abschnitt zeigen, dass Beginn- und Endknoten dieses Abschnitts einer Meinung sind. Für Abschnitte aus geheimen Kanten folgt dies aus I) und H) und für Abschnitte von freien oder Randkanten folgt dies mit unserem Kriterium E) aus der Voraussetzung, dass $T$ eine Vervollständigung besitzt. □

Bevor wir endlich Theorem 4 beweisen machen, wir noch eine letzte Feststellung, die mit Fallunterscheidung gezeigt werden kann.

K) *Sei $T$ eine reduzierte Pflasterung. Dann gibt es in $S(T)$ kein freies Feld, das auf zwei gegenüberliegenden Seiten von Dominos begrenzt wird.*

## Das letzte Puzzleteil

Nun setzen wir unsere Ergebnisse zusammen und beweisen die zu Theorem 4 noch fehlende Aussage: Ist $T$ eine reduzierte Pflasterung, so sind die von $S(T)$ nicht bedeckten Felder die disjunkte Vereinigung von schwarzen Blöcken.

**Beweis.** Angenommen, die Aussage gilt nicht. Dann sei $T$ eine reduzierte Pflasterung mit der Eigenschaft, dass die freie Fläche von $S(T)$ nicht die disjunkte Vereinigung von schwarzen Blöcken ist. Dann hat die freie Fläche von $S(T)$ eine Komponente $K$, die nicht die disjunkte Vereinigung von schwarzen Blöcken ist. Nach J) existieren dann zwei schwarze Knoten $p$, $q$ auf dem Rand von $K$, die verschiedener Meinung sind.

Der Beweis läuft nun wie folgt: Als erstes werden wir sehen, dass wir o.B.d.A. über $p$ und $q$ vereinfachende Annahmen machen können (Behauptung 1). Wir werden dann zeigen, dass es einen Kantenweg $w$ von $p$ nach $q$ gibt, der in $S(T)$ nur freie Kanten verwendet (Behauptung 2). Schließlich werden wir feststellen, dass dieser Weg nach dem Shuffling betrachtet, also in $T$, nur aus erlaubten Kanten besteht, wobei wir den Anfangs- und Endknoten modifizieren müssen (Behauptung 3). Wir haben dann einen Weg aus erlaubten Kanten zwischen zwei schwarzen Knoten verschiedener Meinung in $T$ konstruiert. Das ist ein Widerspruch zu J), womit Theorem 4 bewiesen ist.

*Behauptung 1.* O.B.d.A. können $p$ und $q$ so gewählt werden, dass genau 1 oder 2 benachbarte ihrer angrenzenden Felder belegt sind (also so wie in Abbildung 21 aufgelistet).

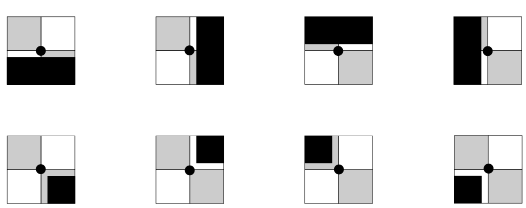


**Abbildung 21.** Die 8 Möglichkeiten, wie die Situation am Knoten $p$ bzw. $q$ aussehen kann. Die Felder mit schwarzen Balken sind die belegten Felder.

*Beweis von Behauptung 1.* Wegen H) und I) sind Knoten, die auf einem zusammenhängenden Stück Rand von $K$ liegen, einer Meinung. Statt $p$ können wir also einen beliebigen anderen schwarzen Knoten wählen, der auf der gleichen Komponente des Randes von $K$ liegt wie $p$. Unter diesen schwarzen Knoten muss es aber einen geben, der keine Ecke ist oder bei dem nur ein angrenzendes Feld belegt ist (vgl. Abbildung 21). Denn wären in der Randkomponente von $p$ alle schwarzen Knoten Ecken, bei denen zwei oder drei der angrenzenden Felder belegt sind (vgl. Abbildung 22), dann wäre $K$ ein schwarzer Block und besäße somit eine Vervollständigung.

**Abbildung 22.** Beispiele für Knoten, die wir nicht für $p$ oder $q$ wählen.

*Behauptung 2.* Es gibt in $S(T)$ einen Kantenweg $w$ von $p$ nach $q$ aus freien Kanten.

*Beweis von Behauptung 2.* (Siehe Abbildung 23.) Da $p$ und $q$ an dieselbe zusammenhängende freie Fläche grenzen, gibt es einen Weg $\tilde{w}$ über freie Felder von $p$ nach $q$. Wegen K) findet man nun einen Kantenweg $w$ so, dass jede Kante von $w$ auf beiden Seiten freie Felder hat und nur Kanten der Felder aus $\tilde{w}$ verwendet. Wir wählen für die erste Wegkante von $w$ die Kante des ersten Feldes von $\tilde{w}$, die $p$ enthält und nicht zum Rand von $K$ gehört. Genauso wählen wir für die letzte Wegkante von $w$ die Kante des letzten Feldes von $\tilde{w}$, die $q$ enthält und nicht zum Rand von $K$ gehört. Dies geht wegen der Wahl von $p$ und $q$ nach Behauptung 1.

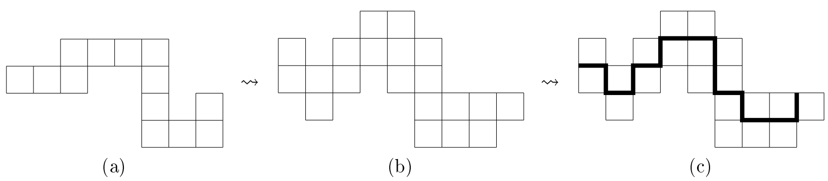


**Abbildung 23.** Zur Konstruktion von $w$: (a) Wir beginnen mit einer Folge freier Felder $\tilde{w}$. (b) Mit Hilfe von K) finden wir weitere freie Felder. (c) Abschließend finden wir die gesuchte Folge von freien Kanten.

*Behauptung 3.* Nach dem Shuffling gibt es einen Weg $w'$ von $p'$ nach $q'$ in $S(S(T)) = T$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $w = w'$ bis auf ein Anfangs- und ein Endstück. Genauer $w = w'$, außer dass $w'$
   - entweder eine andere Anfangskante als $w$ oder 2 zusätzliche Anfangskanten hat
   - entweder eine andere Endkante als $w$ oder 2 zusätzliche Endkanten hat.
2. Alle Kanten $e$ von $w'$ sind erlaubte Kanten.
3. $p'$ und $q'$ sind schwarze Knoten, die verschiedener Meinung sind.

*Beweis von Behauptung 3.* Zum Beweis konstruieren wir $w'$ mit den Eigenschaften 1) bis 3). In $T$ müssen nach Konstruktion von $w$ alle Kanten von $w$ außer der ersten und der letzten erlaubte Kanten sein. Es gibt zwei Möglichkeiten, wie der Anfang bzw. das Ende von $w$ aussehen können:

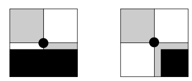
- Ist in $T$ auch die erste bzw. die letzte Kante von $w$ erlaubte Kante, müssen wir 2 geeignete Kanten finden, um den Weg zu verlängern, so dass 2) und 3) erfüllt werden.

- Ist in $T$ die erste bzw. die letzte Kante von $w$ keine erlaubte Kante, müssen wir eine alternative Anfangs- bzw. Endkante finden, so dass $w'$ die Eigenschaften 1) bis 3) erfüllt.

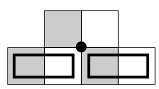
Wir werden nun in einer Fallunterscheidung explizit angeben, wie Anfang bzw. Ende von $w'$ aussehen. Um die Anzahl der Fälle zu minimieren, machen wir von mehreren Involutionen auf den reduzierten Pflasterungen eines Schachbrettes Gebrauch, die mit dem Shuffling verträglich sind. Zu diesen gehören

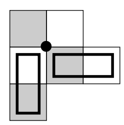
- das Drehen um 180 Grad,
- die Spiegelung an einer Diagonalen durch einen Knoten und
- das Spiegeln an einer Senkrechten durch einen Knoten bei gleichzeitigem Umfärben des Schachbrettes.

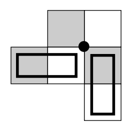
Aufgrund dieser Involutionen können wir die 8 möglichen Situationen am Knoten $p$ bzw. $q$ auf folgende 2 Fälle reduzieren

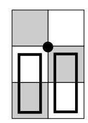


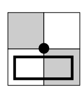
Diese gliedern sich in folgende 7 Unterfälle:

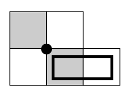

*Fall 1*

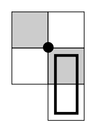

*Fall 2*


*Fall 3*


*Fall 4*

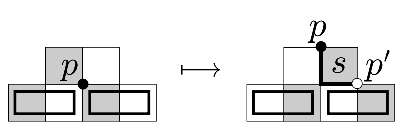

*Fall 5*


*Fall 6*


*Fall 7*

Von diesen kann man wiederum den 3. und 7. Fall vernachlässigen, da sie durch eine Involution aus dem 2. bzw. 6. Fall hervorgehen. Wir werden nun die Konstruktion für die verbleibenden Fälle durchführen.

*Fall 1*




Mithilfe von K) und C) sieht man sofort, dass die beiden Felder über $p$ frei sein müssen. In Wirklichkeit müssen noch mehr Felder frei sein, so wie in Abbildung 24 gezeigt, doch das brauchen wir für den Beweis nicht. Mit A) ist klar, dass nach dem Shuffling $s$ (und das weiße Feld) nicht überdeckt sein können. Also können wir den Weg um 2 Kanten verlängern, von denen eine normale Randkante und eine freie Kante ist.

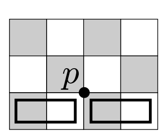
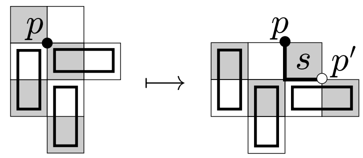


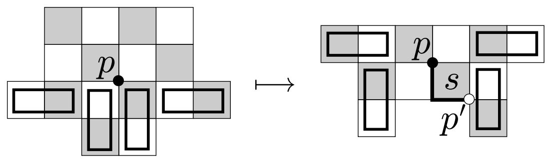

**Abbildung 24.**

Mit dergleichen Argumentation erledigt man auch Fall 2, 4 und 6.

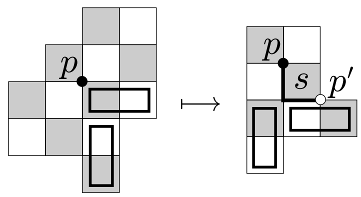
*Fall 2*



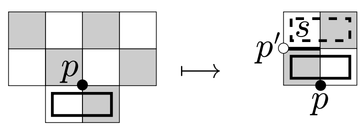

*Fall 4*




*Fall 6*




*Fall 5*




In Fall 5 bekommt $w'$ eine andere Anfangs- bzw. Endkante als $w$. Das weiße Feld $s$ ist entweder frei oder von dem gestrichelt eingezeichneten Domino überdeckt nach A). Die eingezeichnete Kante ist also in jedem Fall V-Randkante.

In jedem Fall finden wir also $p'$ bzw. $q'$ wie behauptet und da $p'$ und $p$ sowie $q'$ und $q$ verschiedener Meinung sind, nach Voraussetzung aber $p$ und $q$ verschiedener Meinung, müssen auch $p'$ und $q'$ auf verschiedener Meinung sein. Das ist ein Widerspruch zu J), denn $p'$ und $q'$ gehören zur selben V-Komponente von $T$ und $w'$ ist ein Weg aus erlaubten Kanten zwischen $p'$ und $q'$. $\square$

# Literaturverzeichnis

**[1]** N. Elkies, G. Kuperberg, M. Larsen, and J. Propp. Alternating-sign matrices and domino tilings. *Journal of Algebraic Combinatorics*, 1:111–132,219–234, 1992.

**[2]** P. W. Kasteleyn. The statistics of dimers on a lattice, i: The number of dimer arrangements on a quadratic lattice. *Physica*, 27:1209–1225, 1961.

**[3]** D. A. Klarner. My life among the polyominoes. In D. A. Klarner, editor, *The Mathematical Gardner*, pages 243–262. Prindle, Weber and Schmidt, 1981.

**[4]** L. Lovász. *Combinatorial Problems and Exercises*, pages 238–243. North-Holland, 1979.

**[5]** E. W. Montroll. Lattice statistics. In E. F. Beckenbach, editor, *Applied Combinatorial Mathematics*. Wiley, 1964.